Développement : Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Algèbre & Géométrie

Référence : [ENS] Francinou S., Gianella H., Nicolas S., *Exercices de mathématiques - Oraux X-ENS - Algèbre 1*, Cassini, 2001, p305
Pour les leçons :
- 148 : Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Exemples et applications.
- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geqslant 2$) et $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $(E_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $f_A : X \longmapsto \mathrm{Tr}(AX)$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(A) = f_A$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve : Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \varphi(A+\lambda B)(X) &= f_{A+\lambda B}(X) \\ &= \mathrm{Tr}((A+\lambda B)X) \\ &= \mathrm{Tr}(AX+\lambda BX) \\ &= \mathrm{Tr}(AX)+\lambda\mathrm{Tr}(BX) \\ &= f_A(X)+\lambda f_B(X) \\ &= \varphi(A)(X)+\lambda\varphi(B)(X). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.
Montrons que φ est injective. Soit $A = (A_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(A) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \mathrm{Tr}(AX) = 0.$$

Soient $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Tr}(AE_{i_0,j_0}) \\ &= \sum_{p=1}^{n} (AE_{i_0;j_0})_{p,p} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{p,k}(E_{i_0,j_0})_{k,p} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{p,k}\delta_{i_0,k}\delta_{j_0,p} \\ &= A_{j_0,i_0}. \end{aligned}$$

Donc A est la matrice nulle.
$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est donc une application linéaire injective, avec $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*)(= n^2)$.
Par conséquent, φ est un isomorphisme. □

Application 2.

Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad f(XY) = f(YX).$$

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad f(X) = \lambda\mathrm{Tr}(X).$$

Preuve : D'après le théorème précédent, comme φ est un isomorphisme, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f = f_A$.
En outre, par hypothèse, pour tout $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$:

$$\mathrm{Tr}(AXY) = \mathrm{Tr}(AYX).$$

D'où $\mathrm{Tr}(AXY) = \mathrm{Tr}(XAY)$, et donc :

$$\mathrm{Tr}((AX - XA)Y) = 0,$$

pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a montré que :

$$f_{AX-XA} = f_0,$$

c'est-à-dire $\varphi(AX - XA) = \varphi(0)$, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Encore grâce au lemme, on en déduit que $AX = XA$, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Maintenant, si $(i_0, j_0, i, j) \in [\![1; n]\!]^4$:

$$\begin{aligned}(AE_{i_0,j_0})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\delta_{k,i_0}\delta_{j,j_0} \\ &= A_{i,i_0}\delta_{j,j_0},\end{aligned}$$

et de même :

$$(E_{i_0,j_0}A)_{i,j} = \delta_{i,i_0}A_{j_0,j}.$$

Donc :

$$A_{i,i_0}\delta_{j,j_0} = \delta_{i,i_0}A_{j_0,j}.$$

Maintenant, si $j = j_0$ et $i = i_0$, on a $A_{i,i} = A_{j,j}$, donc les coefficients diagonaux de A sont les mêmes.
Si $j \neq j_0$ et $i = i_0$, $A_{j_0,j} = 0$, donc les coefficients non diagonaux de A sont nuls.
Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$, et donc, pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$f(X) = f_A(X) = \mathrm{Tr}(AX) = \lambda \mathrm{Tr}(X),$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 3.

- Ce résultat peut être démontré sans le théorème, directement, en calculant les $f(E_{i,j})$ et $f(E_{i,i})$ pour $i, j \in [\![1; n]\!]$. On aurait alors $\lambda := f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$, et f et $\lambda\mathrm{Tr}$ coïncideraient sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elles sont donc égales.
J'ai cependant choisi cette preuve car le but est d'utiliser des outils de dualité, donc je me suis dit que c'était plus pertinent de faire comme j'ai fait.

- Dans la deuxième partie de la preuve de l'application 2, on a en fait montré que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est exactement l'ensemble des homothéties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, i.e. l'ensemble des matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Application 4.

Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ coupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'il contient une matrice inversible.

<u>Preuve :</u> Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ non nulle telle que :

$$H = \mathrm{Ker}(f).$$

D'après le théorème, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\backslash\{0\}$ telle que $f = f_A$.
Il s'agit donc de montrer qu'il existe $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(X) = 0$, i.e. $\mathrm{Tr}(AX) = 0$.
Soit $r = \mathrm{rg}(A)$. On sait que A est équivalente à la matrice diagonale par blocs $J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.
Il existe donc $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle $A = PJ_rQ$.[1] Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AX) &= \mathrm{Tr}(PJ_rQX) \\ &= \mathrm{Tr}(J_rQXP).\end{aligned}$$

On pose $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de permutation (ou alors, on peut vérifier qu'elle est inversible en développant par rapport à la dernière colonne). En posant $X = Q^{-1}YP^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on obtient :

$$\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(J_rY) = 0.$$

Donc $X \in \mathrm{Ker}(f)$ et $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ce qui achève la preuve. □

[1] <u>Attention :</u> coquille dans la référence (en lisant la suite, on se rend compte que ça ne colle pas...).